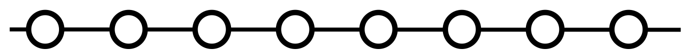
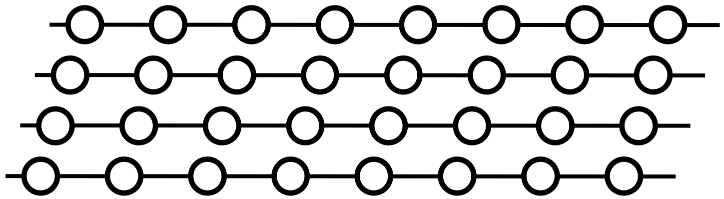
5種類の2次元格子(復習)

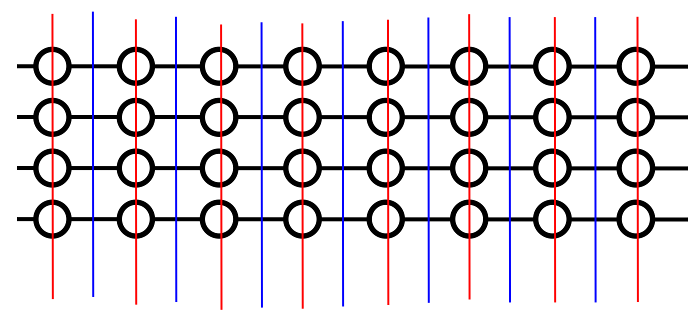
1次元格子を並べて2次元格子を作る



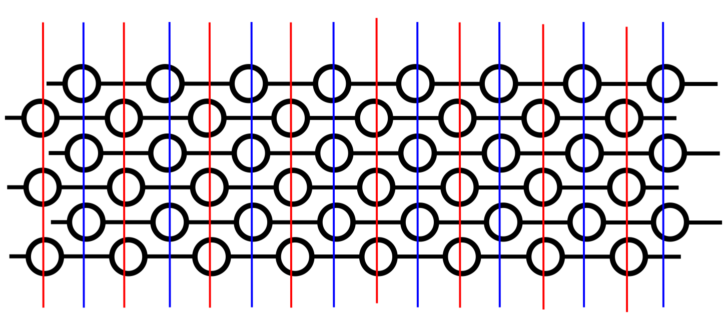
1：対称要素が重ならないように並べる



2：となりあう1次元格子のm_1 同士が一致するように並べる



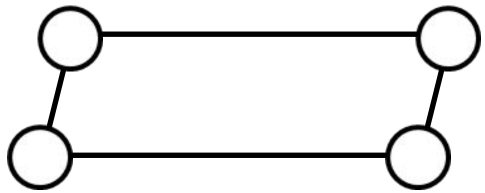
3：となりあう1次元格子の m_1 と m_2 が一致するように並べる



１は対称性を崩す並べ方
２と３は対称性を保持する並べ方

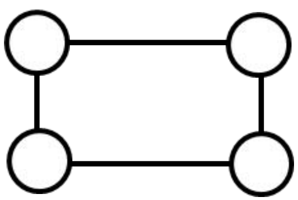
2次元格子の単位格子(全部で5個)

1：斜交ネット
（Oblique Net）

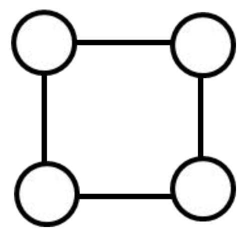


1次元格子の
対称性を崩す

2-①：長方形ネット



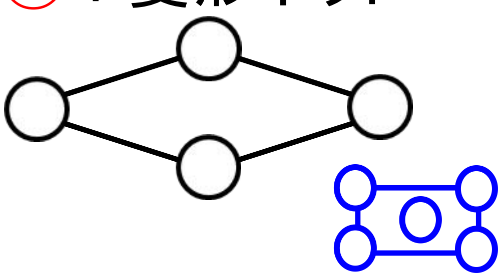
2-②：正方形ネット



長方形ネットの特殊形

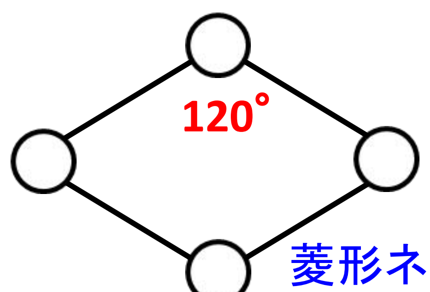
1次元格子の
対称性を保持

3-①：菱形ネット



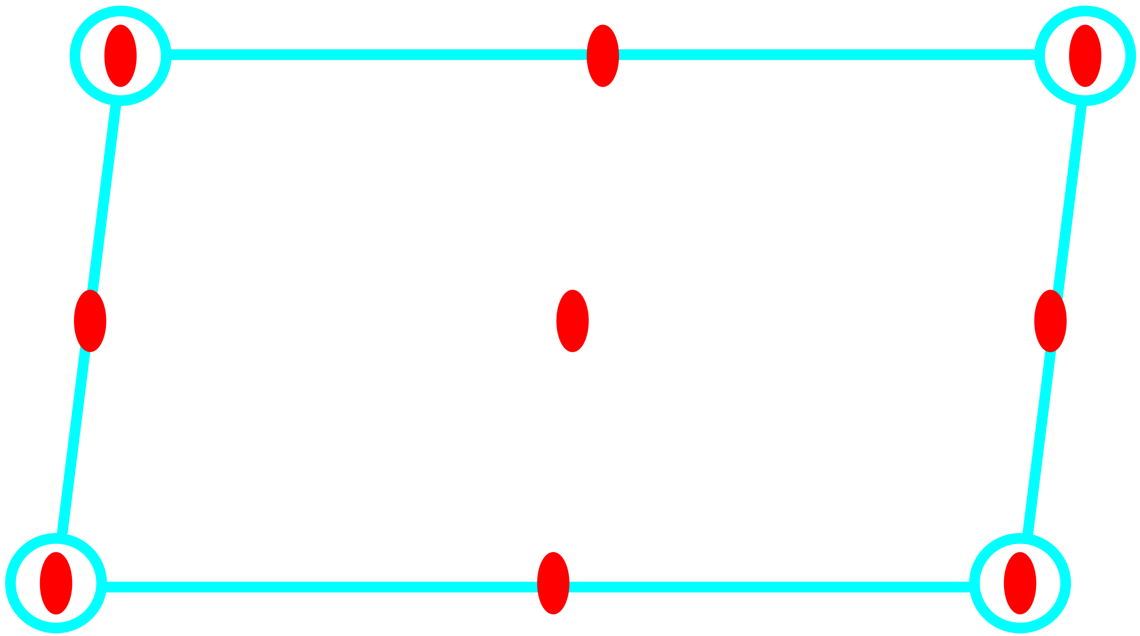
（面心長方形ネット）

3-②：六方ネット（三方ネット）



菱形ネットの特殊形

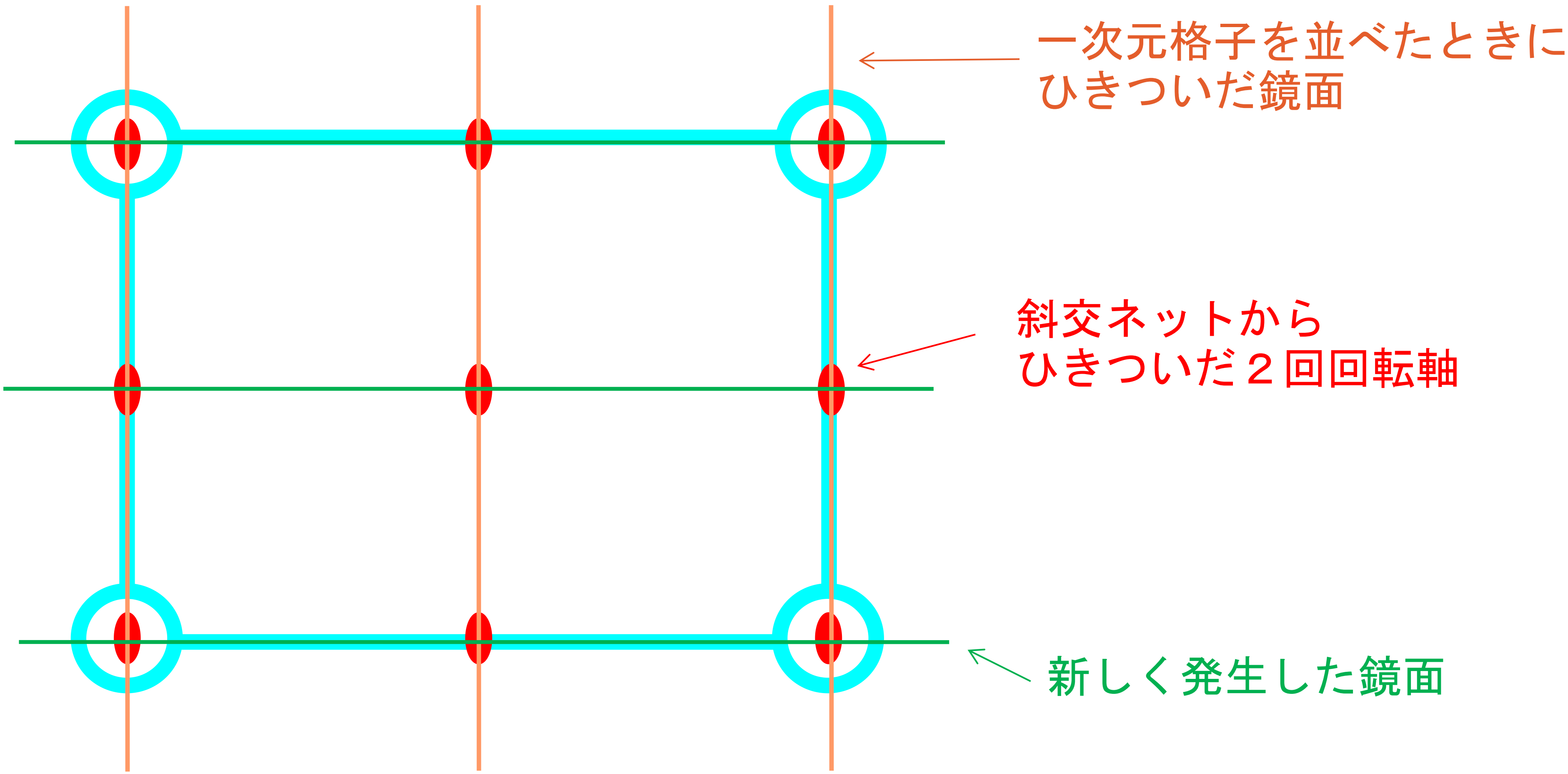
斜交ネットの対称性



斜交ネット単位格子

以後、本日のスライドにおいては、格子点および
格子点同士を結ぶ線(格子境界)は、空色で示します。
空色以外の直線は鏡面を示します

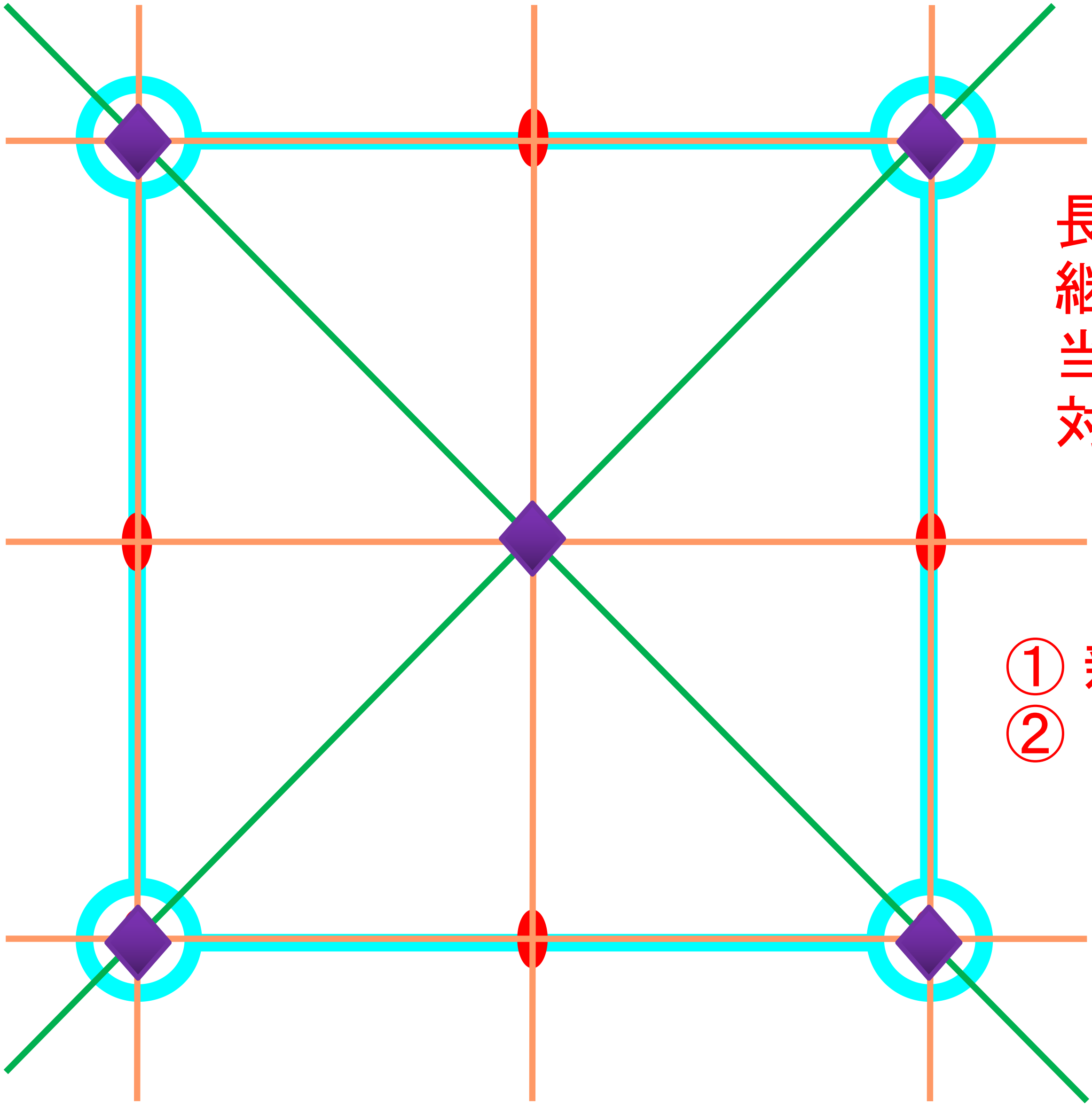
長方形ネットの対称性



長方形ネット単位格子

斜交ネットの対称性を継承してゐることに注意しましょう

正方形ネットの対称性



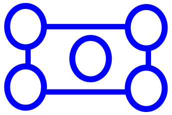
正方形ネット単位格子

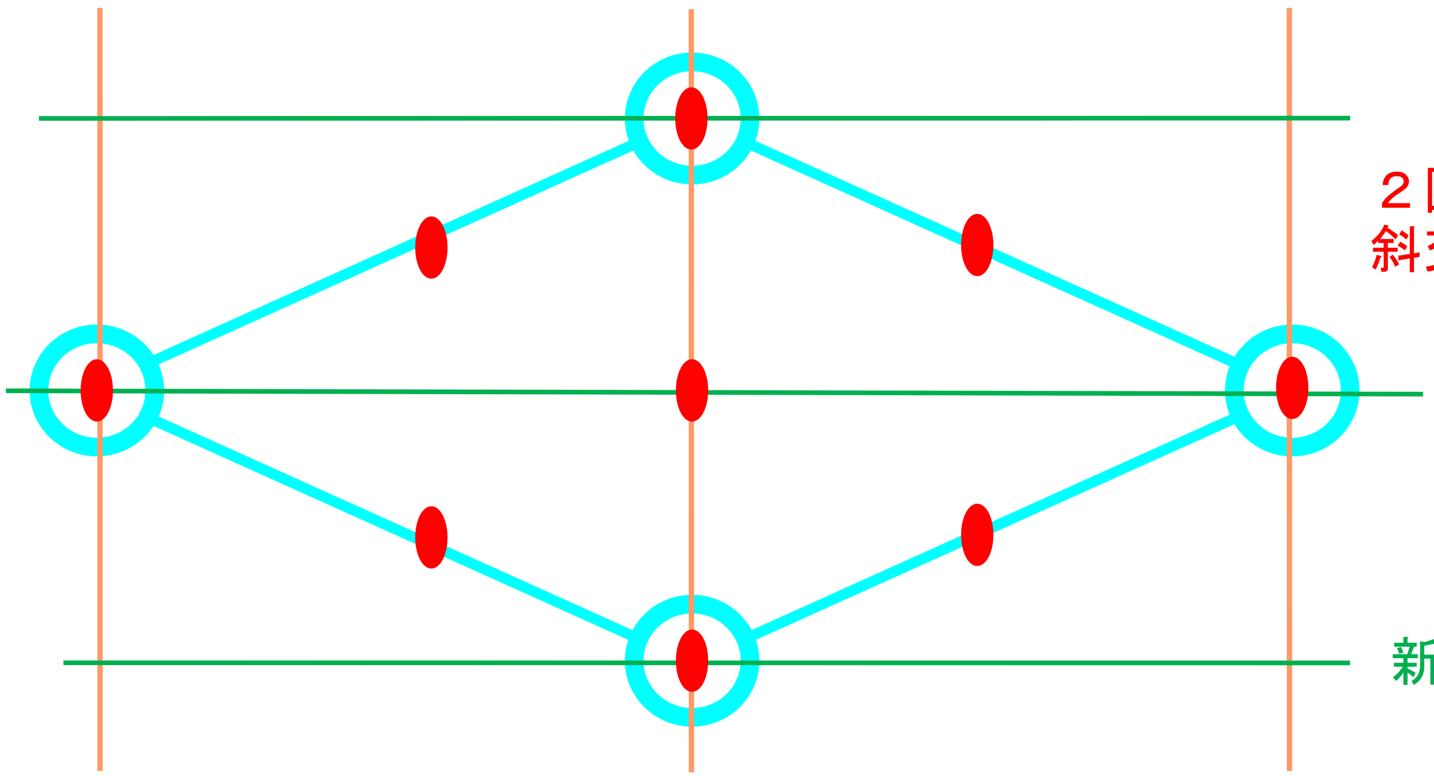
長方形ネットの対称性を
継承しています。
当然ながら、斜交差ネットの
対称性も継承しています。

① 新しい鏡面が追加される
② ２回軸の一部が４回軸に昇格

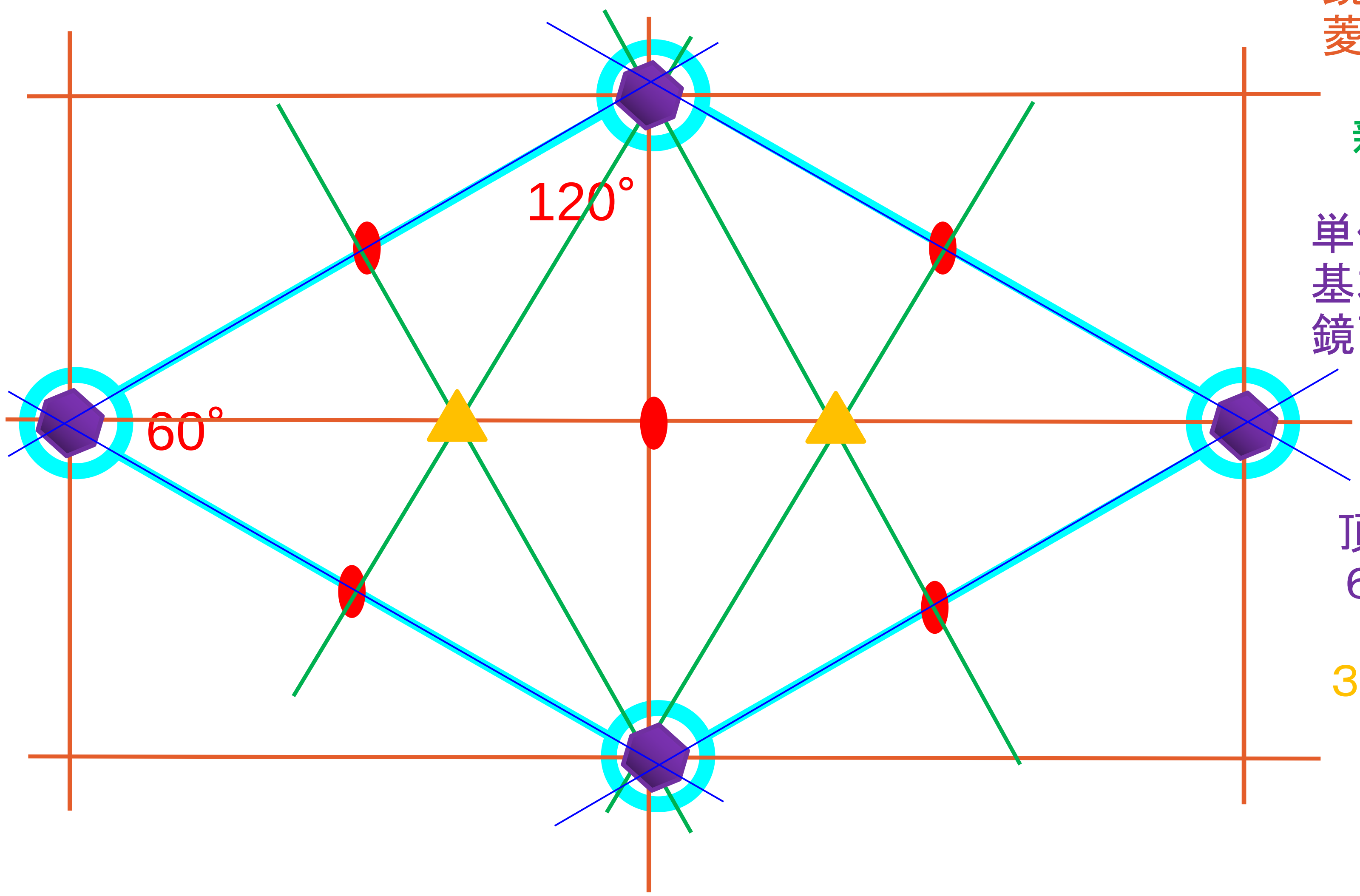
新しく発生した鏡面

菱形ネットの対称要素


（面心長方形ネット）


２回回転軸は
斜交ネットから継承
新しく発生した鏡面
一次元格子を並べたときに
ひきついだ鏡面

六方ネットの対称要素



２回回転軸は斜交・菱形ネットから継承

鏡面の一部も菱形ネットから継承

新たな鏡面が発生

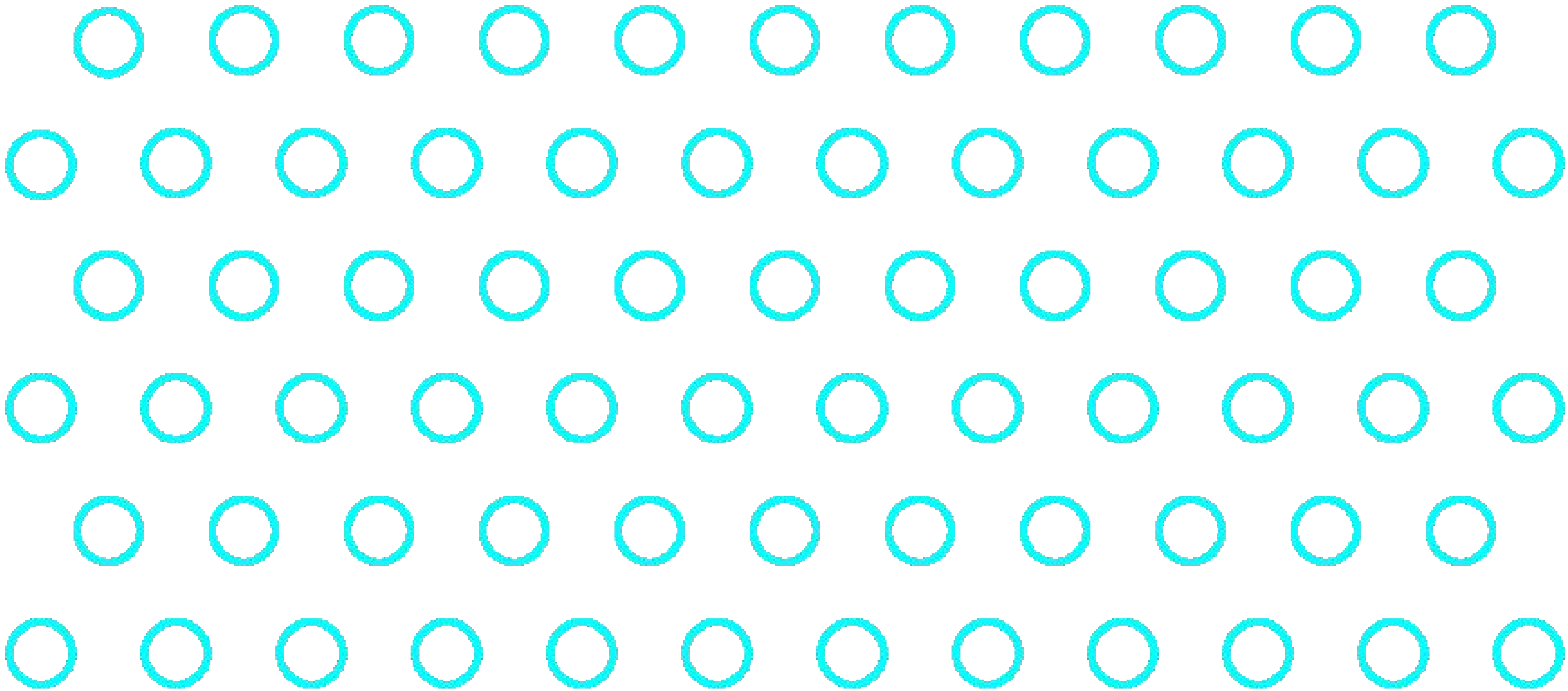
単位格子の基本ベクトルを含む鏡面が発生

頂点の２回回転軸が６回回転軸に昇格

３回回転軸が発生

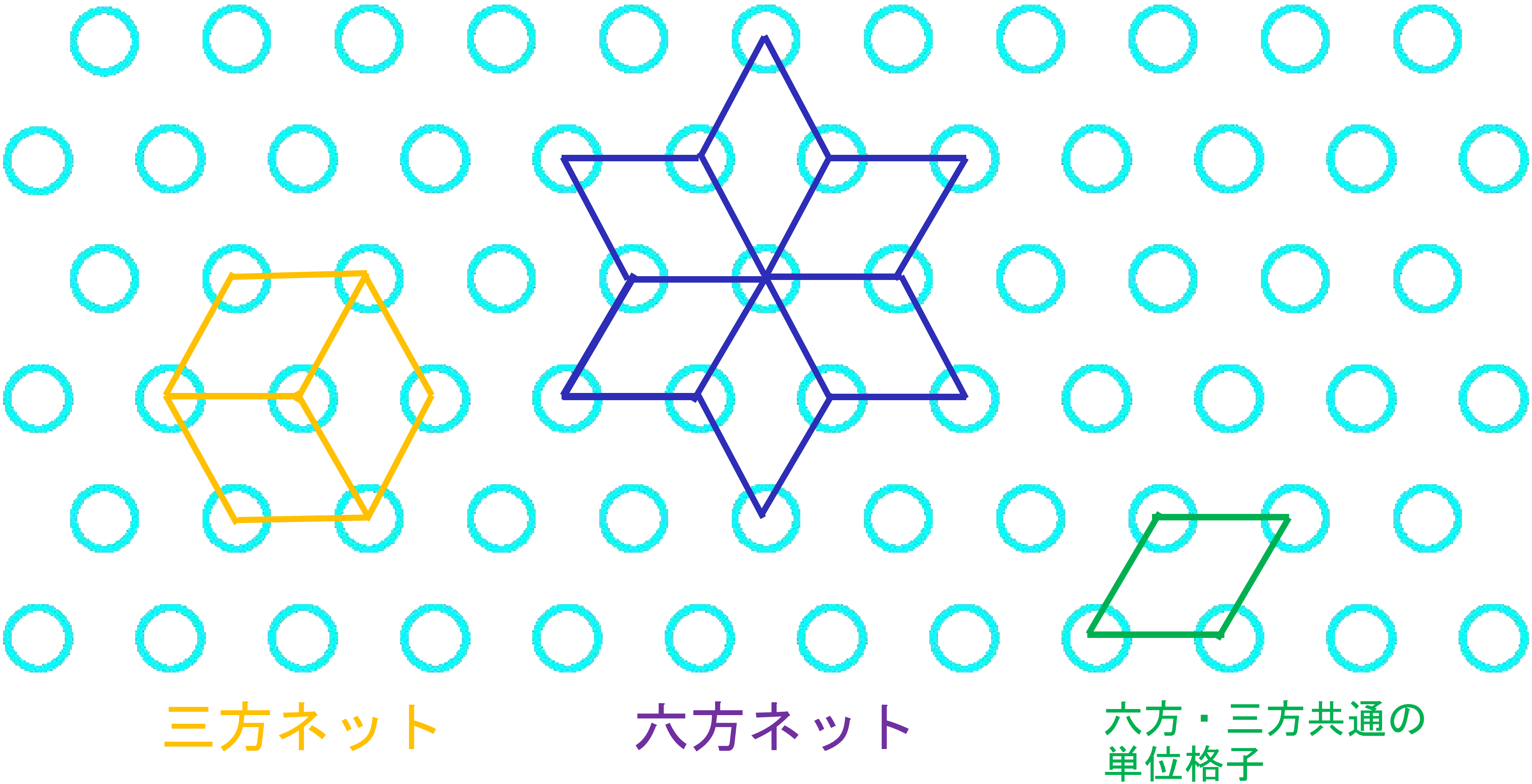
六方ネットと三方ネットは同じ形！

(…形だけ見ても判らないので、2次元格子としては区別しない。)



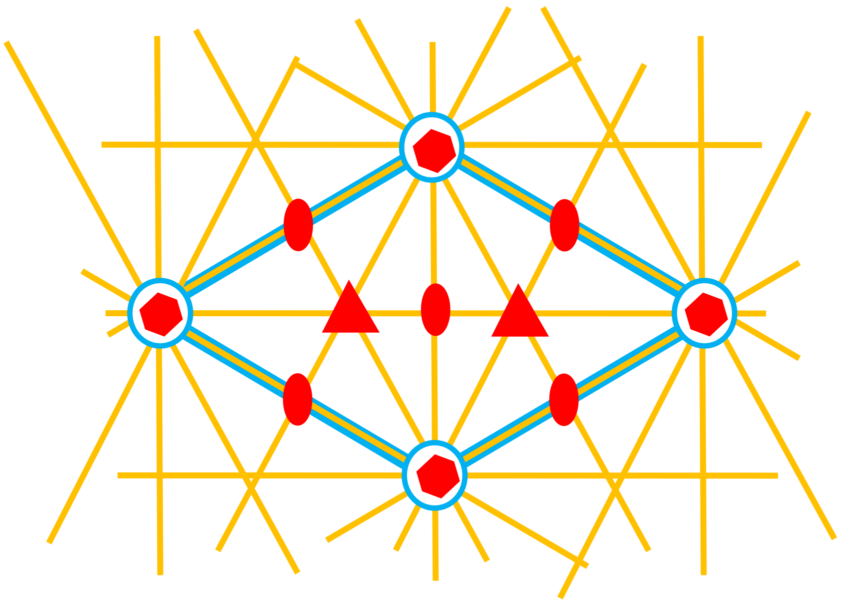
格子点が６回対称性を持っている(３回対称性も)場合も、
３回対称性だけしか無い場合も、同じネット形になります。
自力で確認してみましょう

六方ネットと三方ネット



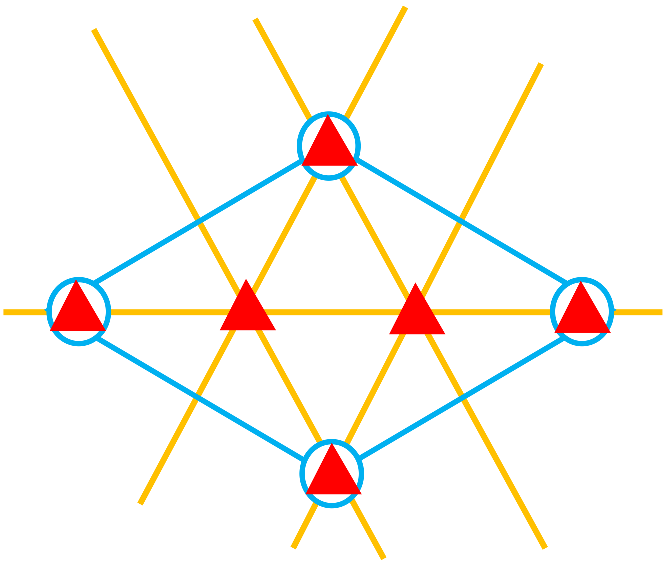
六方ネットと三方ネットの対称要素

六方ネット



再掲(色をシンプルにして
鏡面と回転軸を表示)

三方ネット



学部レベルでは
これは難問です

六方ネットであるか三方ネットであるかの違いは、
格子点に原子を配置して初めて判明する

Text p.10 および 11 を読むこと → 格子座標による表示

本日の演習

ある軸を回転軸として1/n回転 (2π/n ラジアン回転)する「回転対称操作」は、記号C_nで表される。**並進対称性と両立する回転対称操作は、何もしない操作(“C_1”あるいは ”1”と書く)という操作も含めてC_2、C_3、C_4、C_6だけ**である。

「回転操作を施して移った格子点はやはり格子点でなければならない」という考え方を使ってこれを証明したい。

問題(講義時間内で解答)

１． ある結晶の対称操作としてC_n が存在すれば、C_n^{-1} も必ず存在することを示せ。

C_n が存在すれば、C_n^2 、C_n^3 、… C_n^{n-1} が存在する。
ここで$C_n^n=C_n^{n-1}$・C = 1 であるから、$C_n^{n-1}= C_n^{-1}$ である。

２． C_2、C_3、C_4、C_6 は、並進対称操作と両立することを示せ。
(ヒント：「２次元の『○○ネットにおけるC_x回転操作』がこれを満たす」という解答で良い)

六方ネットには C_2、C_3、C_6 が含まれ、正方形ネットには C_4 が含まれている。したがって、C_2、C_3、C_4、C_6 は並進対称操作と両立する。

ここからが本番

結晶の中に、右のFig.1のように、等間隔 aで格子点が並んでおり、各格子点には紙面に垂直な回転軸C_n (n≧5) があるとする。
Z_1を中心とするC_nによって点P_1がQ_1に移り、Z_2を中心とするC_n^{-1}によって点P_2がQ_2に移ったとする。線分 Z_1Z_2 とQ_1Q_2 が平行であることを示せ。

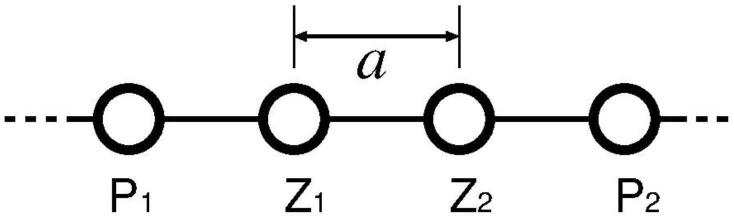


Fig.1

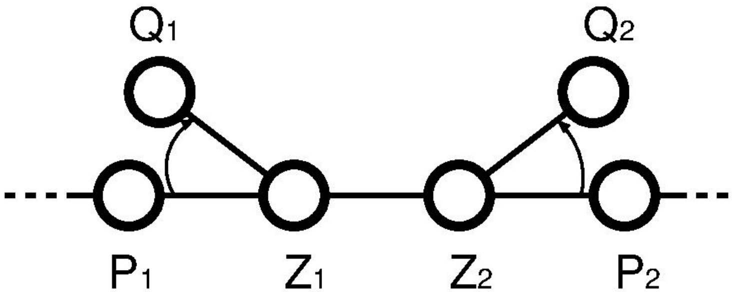


Fig.2

四角形 $Z_1Z_2Q_2Q_1$ は台形であるから。

本番その2(提出課題)

$\angle \mathrm{Q}_1 \mathrm{Z}_1 \mathrm{P}_1 = \angle \mathrm{Q}_2 \mathrm{Z}_2 \mathrm{P}_2 = \theta = 2\pi/n$ とする。

aとθ を用いて 線分$\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$の長さ L を表せ。

点 Q_1、Q_2 は格子点であるから、L はa の整数倍である。

nがとり得る値(整数)を求め、スライド#11の課題(赤字部分)を証明せよ。